

## 第四章 对数运算与对数函数

# S1 对数的概念 & S2 对数的运算

## 基础满分

1. B 【解析】由题可得  $\begin{cases} x+1>0, \\ x-3>0, \\ x-3 \neq 1, \end{cases}$  解

得  $3 < x < 4$  或  $x > 4$ . 故 B 正确.

2. B 【解析】 $2^3 = 8$  化为对数式为  $\log_2 8 = 3$ . 故 B 正确.

3. C 【解析】由题意可得  $\ln 55 = \ln \frac{1}{20} \approx \ln \frac{e^7}{e^3} = \ln e^4 = 4$ . 故 C 正确.

4. D 【解析】由  $\log_3(x-2) = 1$ , 得  $x-2=3$ , 解得  $x=5$ , 由  $2^{y-3}=1$ , 得  $y-3=0$ , 解得  $y=3$ , 所以  $x+y=8$ . 故 D 正确.

5. BCD 【解析】只有满足  $a > 0$ , 且  $a \neq 1, N > 0$ , 才有  $a^x = N \Leftrightarrow x = \log_a N$ , 故 B 错误, A 正确; 以  $e$  为底数的对数叫作自然对数, 以 10 为底数的对数叫作常用对数, 故 CD 错误.

6. BCD 【解析】 $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{4}{3}\right)^3\right]^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{16}$ , 故 A 正确;

$a\sqrt{-\frac{1}{a}} = -(-a)\sqrt{-\frac{1}{a}} = -\sqrt{(-a)^2\left(-\frac{1}{a}\right)} = -\sqrt{-a} (a < 0)$ , 故 B 错误;

若  $\log_2 x = 3$ , 则  $x = 2^3 = 8$ , 故 C 错误;

若  $\log_{\sqrt{5}} x = 0$ , 则  $x = (\sqrt{5})^0 = 1$ , 故 D 错误.

7.2  $10^{-2}$  【解析】根据题意, 若

$4^x = 16$ , 则  $x = \log_4 16 = 2$ ;

若  $\lg y = -2$ , 则  $y = 10^{-2}$ .

8. 【解】(1) 由  $\log_x 8 = 3$ , 得  $x^3 = 8$ , 解得  $x = 2$ .

(2) 由  $10^{\lg(2x-1)} = 35$  两边取以 10 为底的对数, 得  $\lg(2x-1) = \lg 35$ , 即  $2x-1 = 35$ , 解得  $x = 18$ .

(3) 由  $\log_2[\log_3(\log_4 x)] = 0$ , 得  $\log_3(\log_4 x) = 1$ , 所以  $\log_4 x = 3$ , 即  $x = 64$ .

9. B 【解析】 $\log_2 3 + \log_{\frac{1}{2}} 3 = \log_2 3 - \log_2 3 = 0$ , 故 A 正确;  $\frac{\log_3 64}{\log_3 8} = \frac{2\log_3 8}{\log_3 8} = 2$ , 故 B 错误;  $(2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \cdot (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} = [2^2 - (\sqrt{3})^2]^{\frac{1}{2}} = 1$ , 故 C 正确;

$a > 0$  时,  $\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a}} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{a^{\frac{4}{3}}} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$ , 故 D 正确.

10. B 【解析】根据指数幂的运算性质知  $a^s a^t = a^{s+t}$ , 故 A 错误, B 正确; 根据对数的运算性质知  $\log_a s + \log_a t = \log_a(st)$ , 故 CD 错误.

11. B 【解析】因为  $a = \frac{1}{2} \lg 20 + \lg \sqrt{5}$ ,  $b = \log_4 5$ , 所以  $a + 2^b = \lg \sqrt{20} + \lg \sqrt{5} + 4^{\frac{1}{2} \log_4 5} = \lg 10 + 4^{\log_4 \sqrt{5}} = 1 + \sqrt{5}$ . 故 B 正确.

12. A 【解析】原式  $= 3\lg 2 + 3\lg 5 - 49 + 2^{4 \times \frac{3}{4}} + 1 = 3(\lg 2 + \lg 5) - 49 + 8 + 1 = 3\lg(2 \times 5) - 40 = 3 - 40 = -37$ . 故 A 正确.

13. -10 【解析】原式  $= -2 + 2\lg 2 + \lg 5 + \sqrt{(\lg 2 - 1)^2} - 10 = -2 + 2\lg 2 + \lg 5 + 1 - \lg 2 - 10 = -2 + \lg 2 + \lg 5 + 1 - 10 = -11 + \lg 10 = -11 + 1 = -10$ .

## 易错警示 混淆对数的运算性质

## 性质

要把握住对数的运算性质的本质特征, 熟记公式, 防止应用时出现错误.

14. C 【解析】 $\frac{\log_3 8}{\log_3 2} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$ . 故 C 正确.

15. B 【解析】 $(\log_5 4) \cdot (\log_{16} 25) = \frac{\lg 4}{\lg 5} \times \frac{\lg 25}{\lg 16} = \frac{2\lg 2}{\lg 5} \times \frac{2\lg 5}{4\lg 2} = 1$ . 故 B 正确.

16. A 【解析】原式  $= \frac{1}{2} - \frac{\lg 2}{\lg 3} \times \frac{3\lg 3}{2\lg 2} + 1 = 0$ , 故 A 正确.

17. 1 【解析】 $\because \log_a x = 2, \log_b x = 3$ ,  $\log_c x = 6, \therefore \frac{\lg x}{\lg a} = 2, \frac{\lg x}{\lg b} = 3, \frac{\lg x}{\lg c} = 6, \therefore \lg x \neq 0. \therefore \log_{abc} x = \frac{\lg x}{\lg a + \lg b + \lg c} = \frac{\lg x}{\frac{\lg x}{2} + \frac{\lg x}{3} + \frac{\lg x}{6}} = 1$ .

18. 【解】(1) 原式  $= \frac{\frac{3}{2} \lg 3 + 3\lg 2 - \frac{3}{2}}{\lg 3 + 2\lg 2 - 1} = \frac{\frac{3}{2}(\lg 3 + 2\lg 2 - 1)}{\lg 3 + 2\lg 2 - 1} = \frac{3}{2}$ .

(2) 原式  $= \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2}{\log_2 5} = \log_2 2 = 1$ .

19. C 【解析】 $\because L = 5 + \lg V, L = 4.8, \therefore 4.8 = 5 + \lg V$ , 即  $\lg V = -0.2$ , 解得  $V = 10^{-0.2} = \frac{1}{10^{0.2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{10}} \approx \frac{1}{1.585} \approx 0.63$ ,  $\therefore$  其视力的小数记

录法的数据约为0.63,观察选项,只有C选项的数值约为0.63.故C正确.

**20. A** 【解析】由题意得两颗星的星等与亮度满足  $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$ , 令  $m_2 = -1.45, m_1 = -26.7$ , 则  $\lg \frac{E_1}{E_2} = \frac{2}{5} \cdot (m_2 - m_1) = \frac{2}{5} \times (-1.45 + 26.7) = 10.1$ , 解得  $\frac{E_1}{E_2} = 10^{10.1}$ . 故A正确.

**21. C** 【解析】由题意可知  $0.2\% \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0.01\%$ , 即  $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{1}{20}$ , 两边取对数化为  $n \geq \frac{\lg \frac{1}{20}}{\lg \frac{2}{3}} =$

$\frac{-1 - \lg 2}{\lg 2 - \lg 3} \approx 7.4$ , 则至少应过滤8次才能使产品达到市场要求. 故C正确.

**22. B** 【解析】由题意得,  $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \cdots + \frac{1}{300} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{300}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{100}\right) = \ln 300 + \gamma - (\ln 100 + \gamma) = \ln 3$ , 故B正确.

**23. C** 【解析】 $\because \frac{N}{M} = \frac{2^{607} - 1}{2^{127} - 1} \approx \frac{2^{607}}{2^{127}} = 2^{480}$ . 令  $2^{480} = k$ , 两边同时取常用对数得  $\lg 2^{480} = \lg k$ ,  $\therefore \lg k = 480 \times \lg 2 \approx 144.48$ ,  $\therefore k \approx 10^{144.48}$ , 结合选项知与  $\frac{N}{M}$  最近的数为  $10^{144}$ , 故C正确.

### 7.4 重难上分

**1. C** 【解析】因为  $x \log_2 3 = 1$ , 所以  $x = \frac{1}{\log_2 3} = \log_3 2$ , 所以  $3^x + 3^{-x} = 3^{\log_3 2} + 3^{-\log_3 2} = 2 + 3^{\log_3 2^{-1}} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ .

故C正确.

**2. B** 【解析】 $\because \log_{\frac{1}{3}} \frac{1-2x}{3} = 0 = \log_{\frac{1}{3}} 1$ ,  $\therefore \frac{1-2x}{3} = 1$ ,  $\therefore x = -1$ . 故B正确.

**3. B** 【解析】 $\because 2 \lg x + \lg 4 - 2 = 0$ ,  $\therefore \lg x = \frac{2 - \lg 4}{2} = 1 - \frac{\lg 4}{2} = 1 - \lg 2 = \lg 5$ ,  $\therefore x = 5$ . 故B正确.

**4. A** 【解析】 $5 = \log_a bc + \log_b c = \log_a b + \log_a c + \log_b c = \frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_a c} + \frac{1}{\log_c a} = \frac{\log_b a + \log_c b}{\log_b a \cdot \log_c b} + \frac{1}{\log_c a} = \frac{3}{\log_c a} + \frac{1}{\log_c a} = \frac{4}{\log_c a}$ , 解得  $\log_c a = \frac{4}{5}$ . 故A正确.

**5. D** 【解析】因为  $x, y$  满足  $\ln(3x+y) = \ln x + \ln y$ , 所以  $3x+y > 0$  ( $x > 0, y > 0$ ). 因为  $\ln(3x+y) = \ln x + \ln y = \ln xy$ , 所以  $3x+y = xy$ ,  $\frac{3}{y} + \frac{1}{x} = 1$ , 所以  $\left(\frac{3}{y} + \frac{1}{x}\right)(x+3y) = \frac{3x}{y} + 9 + 1 + \frac{3y}{x} \geq 10 + 2\sqrt{\frac{3x}{y} \cdot \frac{3y}{x}} = 16$ , 当且仅当  $\frac{3x}{y} = \frac{3y}{x}$ , 即  $x=y=4$  时取等号, 故  $x+3y$  的最小值为16. 故D正确.

**6.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  或  $3^{\frac{1}{3}}$**  【解析】因为  $3 \log_3 x - \log_x 3 = -\frac{1}{2}$ , 所以  $6(\log_3 x)^2 + \log_3 x - 1 = 0$ , 则有  $(2\log_3 x + 1) \cdot (3\log_3 x - 1) = 0$ , 解得  $\log_3 x = -\frac{1}{2}$  或  $\log_3 x = \frac{1}{3}$ , 故  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$  或  $x = 3^{\frac{1}{3}}$ .

**7. 【解】**原方程  $\Leftrightarrow \log_3(3^x - 1) \log_3 \frac{1}{3}(3^x - 1) = 2$ , 令  $t = \log_3(3^x - 1)$ , 则  $t \cdot (-1+t) = 2$ , 解得  $t = 2$  或  $t = -1$ , 所以  $\log_3(3^x - 1) = 2$  或  $\log_3(3^x - 1) = -1$ , 解得  $x = \log_3 10$  或  $x =$

$$\log_3 \frac{4}{3}.$$

**8. C** 【解析】 $\because a = \log_2 m, b = \log_3 m$ ,  $\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_m 2 + \log_m 5 = \log_m 10 = \frac{1}{2}$ ,  $\therefore \sqrt{m} = 10$ ,  $\therefore m = 100$ . 故C正确.

**9. D** 【解析】 $10^b = 5$ , 则  $b = \lg 5$ , 故  $\lg \frac{27}{4} = \lg 27 - \lg 4 = 3 \lg 3 - 2 \lg 2 = 3 \lg 3 - 2(\lg 10 - \lg 5) = 3 \lg 3 - 2(1 - \lg 5) = 3a + 2b - 2$ . 故D正确.

**10. A** 【解析】 $\because \lg 2 = a, \lg 3 = b$ ,  $\therefore \log_{12} 10 = \frac{\lg 10}{\lg 12} = \frac{1}{\lg 3 + 2 \lg 2} = \frac{1}{2a+b}$ . 故A正确.

**11. C** 【解析】由  $3^a = 2$  可得  $a = \log_3 2$ . 又因为  $b = \log_3 12 - \log_3 8$ , 所以  $a + b = \log_3 2 + \log_3 12 - \log_3 8 = \log_3 \frac{24}{8} = \log_3 3 = 1$ , 故C正确.

**12. 【解】** $\because a = \lg 2, b = \lg 3$ ,  $\therefore \log_5 18 = \frac{\lg 18}{\lg 5} = \frac{\lg 2 + \lg 9}{\lg 10 - \lg 2} = \frac{\lg 2 + 2 \lg 3}{1 - \lg 2} = \frac{a + 2b}{1 - a}$ .

### §1 & §2 考点训练

**1. B** 【解析】由  $\log_4 x = 2$  可得  $4^2 = x$ ,  $\therefore x = 16$ . 故B正确.

**2. D** 【解析】原式  $= \frac{\log_3 16}{\log_3 27} \cdot \frac{2 \log_3 4}{3} = \frac{\log_3 16}{\log_3 4} = \frac{2}{3}$ . 故D正确.

**3. A** 【解析】 $\because b = cd, \therefore d = \frac{b}{c} =$

$$\frac{\log_3 a}{\log_4 a} = \frac{\lg a}{\lg 4} = \frac{\lg 4}{\lg 3} = \log_3 4, \text{ 所以 } d \log_2 3 = \log_3 4 \times \log_2 3 = \frac{\log_3 4}{\log_3 2} =$$

$$\frac{2\log_3 2}{\log_3 2} = 2. \text{ 故 A 正确.}$$

4. C 【解析】 $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \neq 4$ , 故 A 错误;  
 $\log_3 5 + \log_3 4 = \log_3 20 \neq 2$ , 故 B 错误;  
 $\lg(\lg 10) = \lg 1 = 0$ , 故 C 正确;  
 $4^{\log_2 9} = 2^{2\log_2 9} = 2^{\log_2 81} = 81 \neq 3$ , 故 D 错误.

5. A 【解析】 $\because f(x) =$

$$\begin{cases} \log_3(x-1), x < 3, \\ 2^{x-1}, x \geq 3, \end{cases}$$

$$\therefore f(2) + f(\log_2 12) = \log_3(2-1) + 2^{\log_2 12 - 1} = 0 + 2^{\log_2 6} = 6. \text{ 故 A 正确.}$$

6. B 【解析】根据题意, 对于  $\frac{3^{361}}{10\,000^{52}}$ , 有  $\lg \frac{3^{361}}{10\,000^{52}} = \lg 3^{361} - \lg 10\,000^{52} = 361 \times \lg 3 - 52 \times 4 \approx -35.8$ , 则  $\frac{3^{361}}{10\,000^{52}} \approx 10^{-35.8}$ , B 中  $10^{-36}$  与其最接近, 故 B 正确.

7. D 【解析】 $(\log_a M)^3 \neq 3\log_a M$ , 故 A 错误;

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N, \text{ 故 B 错误;}$$

$$\frac{\log_a M}{n} = \log_a M^{\frac{1}{n}}, \text{ 故 C 错误;}$$

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M, \text{ 故 D 正确.}$$

8. C 【解析】由  $\log_{18} 9 = a, 18^b = 5$ , 得  $a = \log_{18} 9, b = \log_{18} 5$ , 所以  $\log_{45} 81 = \frac{\log_{18} 81}{\log_{18} 45} = \frac{2 \log_{18} 9}{\log_{18} 9 + \log_{18} 5} = \frac{2a}{a+b}$ . 故 C 正确.

9.  $(2, +\infty)$  【解析】对任意的  $x \in \mathbf{R}$ , 代数式  $\frac{1}{\log_3(2ax^2 - 4x + a)}$  均有意义, 则对任意的  $x \in \mathbf{R}, 2ax^2 - 4x + a > 0$  且  $2ax^2 - 4x + a \neq 1$ .  
 当  $a = 0$  时, 则  $-4x > 0$  且  $-4x \neq 1$ , 解得  $x < 0$  且  $x \neq -\frac{1}{4}$ , 不符合题意;  
 当  $a \neq 0$  时, 由题意可知, 必有  $2a > 0$ , 由二次函数的基本性质可知, 对

任意的  $x \in \mathbf{R}, 2ax^2 - 4x + a > 0$  且  $2ax^2 - 4x + a \neq 1$ , 所以

$$\begin{cases} 2a > 0, \\ 16 - 8a^2 < 0, \\ 16 - 8a(a-1) < 0, \end{cases} \quad \text{解得 } a > 2, \text{ 即实}$$

数  $a$  的取值范围是  $(2, +\infty)$ .

10. 2 【解析】原式 =

$$\left( \frac{2\lg 3 + \lg 3}{\lg 4 + \lg 8} \right) \left( \frac{\lg 2 + \lg 2}{\lg 3 + \lg 9} \right) =$$

$$\left( \frac{\lg 3 + \lg 3}{\lg 2 + 3\lg 2} \right) \left( \frac{\lg 2 + \lg 2}{\lg 3 + 2\lg 3} \right) =$$

$$\frac{4\lg 3}{3\lg 2} \times \frac{3\lg 2}{2\lg 3} = 2.$$

11. 1 【解析】原式 =

$$[(\log_6 6 - \log_6 3)^2 + \log_6 2 \times (\log_6 3 + \log_6 6)] \div \log_6 2^2 =$$

$$[(\log_6 2)^2 + \log_6 2 \times (\log_6 3 + 1)] \div (2 \log_6 2) =$$

$$[(\log_6 2)^2 + \log_6 2 \times (2 - \log_6 2)] \div (2 \log_6 2) =$$

$$[(\log_6 2)^2 + 2 \log_6 2 - (\log_6 2)^2] \div (2 \log_6 2) = 1.$$

12. 【解】(1) 原式 =  $\frac{\lg 3}{2\lg 2}$ .

$$\left( \frac{3\lg 2}{2\lg 3} + \frac{4\lg 2}{3\lg 3} \right) = \frac{\lg 3}{\lg 2} \times \frac{\lg 2}{\lg 3} \times \frac{17}{6} \times$$

$$\frac{1}{2} = \frac{17}{12}.$$

$$(2) \text{ 由题意知, 令 } 3^x = 4^y = 6^z = a, \text{ 则 } a > 0, \text{ 所以 } x = \log_3 a, y = \log_4 a,$$

$$z = \log_6 a, \text{ 所以 } \frac{y}{z} - \frac{y}{x} = \frac{\log_4 a}{\log_6 a} -$$

$$\frac{\log_4 a}{\log_3 a} = \frac{\ln a}{\ln 4} \times \frac{\ln 6}{\ln a} - \frac{\ln a}{\ln 4} \times \frac{\ln 3}{\ln a} =$$

$$\frac{\ln 6 - \ln 3}{\ln 4} = \frac{\ln 2}{\ln 4} = \frac{1}{2}.$$

$$(3) \text{ 设 } 2^{2022} = k, \text{ 则 } \lg k = 2022 \cdot \lg 2, \text{ 因为 } \lg 2 \approx 0.3010, \text{ 所以 } \lg k \approx 2022 \times 0.3010 = 608.622, \text{ 所以 } k \approx 10^{608.622}, \text{ 所以约可得 } k \in (10^{608}, 10^{609}), \text{ 从而 } 2^{2022} \text{ 的位数约为 } 609.$$

### S3 对数函数 & S4 指数函数、幂函数、对数函数增长的比较

#### 基础满分

1. B 【解析】形如  $y = \log_a x (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$  的函数为对数函数, 符合此形式的函数表达式有②③, 其余均不符合. 故 B 正确.

2. B 【解析】因为  $f(x) = \begin{cases} \log_3(x+3), x > 0, \\ 2^{-x} + 2, x \leq 0, \end{cases}$  所以  $f(-2) = 2^{-(-2)} + 2 = 6, f(f(-2)) = f(6) = \log_3(6+3) = 2$ , 故 B 正确.

3. D 【解析】 $\because$  函数  $y = f(x)$  与  $y = e^x$  互为反函数,  $\therefore f(x) = \ln x$ , 又  $\therefore f(m) = -1, \therefore \ln m = -1, m = \frac{1}{e}$ . 故 D 正确.

4. 2 【解析】 $\because$  对数函数  $y = \log_a x (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$  的图象经过点  $A(4, 2), \therefore \log_a 4 = 2, \therefore a = 2$ .

5. 1 【解析】依题意, 函数  $f(x) = \log_a x (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$  的反函数是  $y = a^x$ , 即函数  $y = a^x$  的图象过点  $(1, 3)$ , 则  $a = 3, f(x) = \log_3 x$ , 于是得  $f(\log_2 8) = \log_3(\log_2 8) = \log_3 3 = 1$ , 所以  $f(\log_2 8) = 1$ .

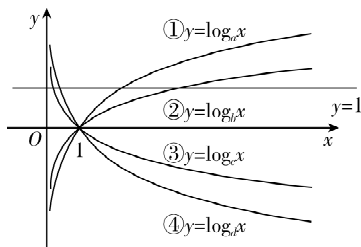
6. A 【解析】由于函数  $y = \log_{0.5} x = -\log_2 x$ , 故函数  $y = \log_{0.5} x$  与  $y = \log_2 x$  的图象关于  $x$  轴对称. 故 A 正确.

7. C 【解析】由对数函数的性质可知, 当  $x = 1$  时,  $f(1) = \log_a 1 + 1 = 0 + 1$ , 所以  $f(x) = \log_a x + 1 (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$  过定点  $A(1, 1)$ , 则  $m + n = 2$ . 故 C 正确.

8. A 【解析】如图所示, 在平面直角坐标系中作一条直线  $y = 1$ , 则直线与每个图象交点的横坐标从左到右分别为  $c, d, a, b$ , 因此  $b > a > 1 >$

$d > c$ , 则  $a+b > a+c$ ,  $b+d > a+c$ , 故 A 正确, D 错误;

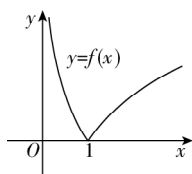
又  $a+d$  与  $b+c$  的大小不确定, 故 BC 错误.



**9. C** 【解析】函数  $y = x^2 - 2ax + 1$  的对称轴方程为  $x = a$ , 且恒过定点  $(0, 1)$ , 由 C 中图象可知, 此时  $0 < a < 1$ , 函数  $y = \log_a(x+1)$  单调递减, 且恒过定点  $(0, 0)$ , 故 C 正确.

**10. D** 【解析】由函数  $f(x) = a^x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$  在  $\mathbf{R}$  上为减函数, 知  $0 < a < 1$ . 易知函数  $y = \log_a(|x| - 1)$  是偶函数, 定义域为  $\{x | x > 1 \text{ 或 } x < -1\}$ , 故 AB 错误; 当  $x > 1$  时, 函数  $y = \log_a(|x| - 1)$  的图象可看作是由函数  $y = \log_a x$  的图象向右平移 1 个单位长度得到的, 故 C 错误, D 正确.

**11. D** 【解析】因为  $f(x) = |\log_3 x|$ , 其图象如下图所示. 由题可得  $0 < a < b$ , 且  $f(a) = f(b)$ , 所以  $-\log_3 a = \log_3 b$ , 即  $\log_3 a + \log_3 b = \log_3 ab = 0$ , 所以  $ab = 1$ ,  $0 < a < 1$ , 由对勾函数的单调性可知,  $a + 4b = a + \frac{4}{a}$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 则  $a + \frac{4}{a} > 1 + \frac{4}{1} = 5$ . 故 D 正确.



**12. A** 【解析】因为  $0 < a < 1$ , 则函数  $y = \log_a x$  在  $[a^3, a^2]$  上单调递减,  $a^3 < a^2$ , 所以函数的最大值为  $\log_a a^3 = 3$ . 故 A 正确.

**13. D** 【解析】因为偶函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递减, 所以  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递增. 因为  $f(1) = 1$ , 所以  $f(-1) = 1$ , 所以  $f(\log_3 x) \leq 1 = f(\pm 1)$ , 所以  $\log_3 x \geq 1$  或  $\log_3 x \leq -1$ , 解得  $x \geq 3$  或  $0 < x \leq \frac{1}{3}$ , 所以  $x$  的取值范围是  $(0, \frac{1}{3}] \cup [3, +\infty)$ . 故 D 正确.

**14. A** 【解析】由  $(\frac{1}{3})^a < 1 = (\frac{1}{3})^0$ , 且易知指数函数  $y = (\frac{1}{3})^x$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减, 因此可得  $a > 0$ . 由  $a^{\frac{1}{2}} < 1 = 1^{\frac{1}{2}}$ , 且易知幂函数  $y = x^{\frac{1}{2}}$  在定义域  $[0, +\infty)$  上单调递增, 可得  $0 \leq a < 1$ , 所以  $0 < a < 1$ , 所以对数函数  $y = \log_a x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 再由  $\log_a \frac{1}{3} < 1 = \log_a a$ , 可得  $0 < a < \frac{1}{3}$ .

综上所述, 实数  $a$  的取值范围是  $(0, \frac{1}{3})$ . 故 A 正确.

**15. 【解】**(1) 若对数函数  $f(x)$  的图象经过点  $(8, 3)$ , 则  $f(8) = \log_a 8 = 3$ ,  $\therefore a^3 = 8$ , 即  $a = 2$ . (2) 当  $a > 1$  时,  $\therefore f(x) = \log_a x$  在  $[a, 2a]$  上单调递增,  $\therefore f(x)_{\max} = f(2a) = \log_a 2a = \log_a 2 + 1$ ,  $f(x)_{\min} = f(a) = \log_a a = 1$ .  $\therefore$  最大值比最小值大 2,  $\therefore \log_a 2 + 1 - 1 = \log_a 2 = 2$ , 解得  $a = \sqrt{2}$ ; 当  $0 < a < 1$  时,  $\therefore f(x) = \log_a x$  在  $[a, 2a]$  上单调递减,  $\therefore f(x)_{\max} = f(a) = 1$ ,  $f(x)_{\min} = f(2a) = \log_a 2 + 1$ , 则  $1 - (\log_a 2 + 1) = -\log_a 2 = 2$ ,  $\therefore a^2 = \frac{1}{2}$ ,  $\therefore a =$

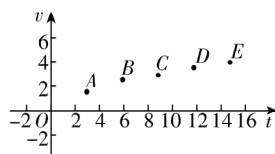
$\frac{\sqrt{2}}{2}$ . 综上  $a$  的值为  $\sqrt{2}$  或  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**16. C** 【解析】由题意可得

$$\begin{aligned} \frac{W \log_2 5\,000}{W \log_2 1\,000} - 1 &= \frac{\lg 5\,000}{\lg 1\,000} - 1 = \\ \frac{3 + \lg 5}{3} - 1 &= \frac{4 - \lg 2}{3} - 1 \approx \\ \frac{1 - 0.301}{3} &\approx 23\%, \text{ 故 C 大约增加了 } 23\%. \text{ 故 C 正确.} \end{aligned}$$

**17. 【解】**(1) 由题意得  $v = \frac{1}{2} \log_3 \frac{O}{100} = 2$ , 得  $O = 3^4 \times 100 = 8\,100$ . 故该鱼的耗氧量的单位数为 8 100. (2) 设甲鲑鱼的游速为  $v_1$  (单位: m/s), 耗氧量的单位数为  $O_1$ , 乙鲑鱼的游速为  $v_2$  (单位: m/s), 耗氧量的单位数为  $O_2$ . 由题意得  $12(v_1 - v_2) = 18$ , 则  $v_1 - v_2 = \frac{1}{2} \left( \log_3 \frac{O_1}{100} - \log_3 \frac{O_2}{100} \right) = \frac{3}{2}$ ,  $\log_3 \frac{O_1}{O_2} = 3$ , 即  $\frac{O_1}{O_2} = 3^3 = 27$ .

**18. D** 【解析】由表格中的数据, 作出数据的散点图, 如图所示.



数据散点图可知与对数函数  $v = \log_2 t$  的图象类似, 所以选项 D 最能反映  $t, v$  之间的函数关系. 故 D 正确.

**19. A** 【解析】因为  $a > 1$ , 所以函数  $y = a^x, y = x^a, y = \log_a x$  均为单调递增函数, 而且各类函数的增长速度为指数函数快于幂函数, 幂函数快于对数函数, 所以  $\exists x_0, \forall x > x_0$ , 有  $a^x > x^a > \log_a x$  成立. 故 A 正确.

### 7.4 重难上分

**1. A** 【解析】当  $a = 0$  时,  $f(x) =$



$\lg(x^2-1)$ , 则  $x^2-1>0$ , 解得  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ , 故 A 正确;  
当  $a=0$  时,  $f(x)=\lg(x^2-1)$ , 此时  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ,  $x^2-1 \in (0, +\infty)$ , 此时  $f(x)=\lg(x^2-1)$  的值域为  $\mathbf{R}$ , 故 B 错误;  
由 A 可得当  $a=0$  时,  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ , 故 C 错误;  
若  $f(x)$  在区间  $[2, +\infty)$  上单调递增, 此时  $y=x^2+ax-a-1$  在  $[2, +\infty)$  上单调递增, 所以其图象的对称轴方程为  $x=-\frac{a}{2} \leq 2$ , 解得  $a \geq -4$ , 但当  $a=-4$  时,  $f(x)=\lg(x^2-4x+3)$  在  $x=2$  处不满足  $x^2-4x+3>0$ , 故 D 错误.

**2. CD** 【解析】若  $y=f(x)$  的定义域是  $(-1, 3)$ , 则关于  $x$  的不等式  $ax^2+bx+c>0$  的解集为  $(-1, 3)$ , 故  $a<0$ , 故 A 错误;  
若函数  $y=f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 则对任意的  $x \in \mathbf{R}$ ,  $ax^2+bx+c>0$ , 所以  $a=b=0, c>0$  或  $a>0$ , 且  $\Delta=b^2-4ac<0$ , 故 B 错误;  
由  $f(-x)=f(1+x)$  可得  $f(x)$  图象的对称轴方程为  $x=\frac{1}{2}$ , 则有  $f(0)=f(1)$ , 则有  $c=a+b+c$ , 所以  $a+b=0$ , 故 C 正确;  
当  $a<0$  时, 函数  $y=ax^2+bx+c$  的值域为  $\left(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$ ,  
若函数  $y=f(x)$  的值域为  $\mathbf{R}$ , 则  $(0, +\infty) \subseteq \left(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ , 显然是不可能的, 故 D 正确.

**3.  $x(x \leq 0)$  (答案不唯一)** 【解析】令  $-x^2+4x-3>0$ , 解得  $1<x<3$ , 所以  $f(x)$  的定义域为  $(1, 3)$ , 令  $-x^2+4x-3=t$ , 则  $t \in (0, 1]$ , 所以函数  $f(x)=\lg(-x^2+4x-3)$  的值域为  $(-\infty, 0]$ , 则  $g(x)$  的值域为

$(-\infty, 0]$ , 故  $g(x)=x(x \leq 0)$  (答案不唯一).

**4.  $\frac{5}{2}$  或 3** 【解析】当  $0<a<1$  时, 易知函数  $f(x)$  为减函数,  
由题意有  $\begin{cases} f(1)=b=2, \\ f(2)=\log_a 2+b=1, \end{cases}$  解得  $a=\frac{1}{2}, b=2$ , 符合题意, 此时  $a+b=\frac{5}{2}$ ;  
当  $a>1$  时, 易知函数  $f(x)$  为增函数, 由题意有  $\begin{cases} f(1)=b=1, \\ f(2)=\log_a 2+b=2, \end{cases}$  解得  $a=2, b=1$ , 符合题意, 此时  $a+b=3$ . 综上可得  $a+b$  的值为  $\frac{5}{2}$  或 3.

**易错警示 忽略对含参底数的**

**讨论**

对数函数  $y=\log_a b$  ( $a>0$ , 且  $a \neq 1$ ) 中, 若底数含参, 则要注意对底数进行分类讨论, 一般情况下分  $a>1$  与  $0<a<1$  两种情况, 对应函数分别为增函数与减函数, 然后利用函数单调性解决问题.

**5. 【解】**(1) 要使函数  $f(x)$  有意义, 必有  $\begin{cases} 2-x>0, \\ 4+x>0, \end{cases}$  解得  $-4<x<2$ ,  $\therefore$  函数  $f(x)$  的定义域为  $\{x|-4<x<2\}$ .  
(2)  $\because f(x)=\log_a[(2-x)(4+x)]$ ,  $\therefore f(x)=\log_a(-x^2-2x+8)=\log_a[-(x+1)^2+9]$ ,  $\because 0<-(x+1)^2+9 \leq 9$ ,  $\therefore f(x)_{\min}=\log_a 9=-2$ , 即  $a^{-2}=9$ , 解得  $a=\frac{1}{3}$  或  $a=-\frac{1}{3}$ . 又  $\because a>0$ , 且  $a \neq 1$ ,  $\therefore a=\frac{1}{3}$ .

**6. 【解】**(1) 由  $f(x)=\log_a(x+1)-\log_a(1-x)$ , 得  $\begin{cases} x+1>0, \\ 1-x>0, \end{cases}$  解得  $-1<x<1$ ,

所以函数  $f(x)$  的定义域为  $(-1, 1)$ .

(2) 由已知得  $f(x)=\log_a(x+1)-\log_a(1-x)=\log_a\left(\frac{x+1}{1-x}\right)=\log_a\left(-1+\frac{2}{1-x}\right)$ , 又函数  $y=-1+\frac{2}{1-x}$  在  $(-1, 1)$  上单调递增, 且  $a>1$ , 所以函数  $f(x)=\log_a\left(-1+\frac{2}{1-x}\right)$  在  $(-1, 1)$  上单调递增. 又因为  $f(0)=0$ , 所以  $f(x)>0$  的解集为  $\{x|0<x<1\}$ .

**7. 【解】**(1) 当  $k=\frac{a}{2}$  时,  $f(x)=\log_a(a^x+a)$ ,  $\because a^x>0$ ,  $\therefore a^x+a>a$ .  
当  $a>1$  时,  $\log_a(a^x+a)>\log_a a=1$ , 故  $f(x)$  的值域为  $(1, +\infty)$ ;  
当  $0<a<1$  时,  $\log_a(a^x+a)<\log_a a=1$ , 故  $f(x)$  的值域为  $(-\infty, 1)$ .

(2) 由复合函数单调性的判断法则得,  $f(x)=\log_a(a^x+2k)$  在  $[m, n]$  上单调递增, 因为  $x \in [m, n]$ ,  $f(x)$  的值域为  $[2m, 2n]$ , 所以

$$\begin{cases} f(m)=2m, \\ f(n)=2n, \end{cases} \text{即存在 } k \text{ 使得} \begin{cases} \log_a(a^m+2k)=2m, \\ \log_a(a^n+2k)=2n, \end{cases} \text{即方程}$$

$\log_a(a^x+2k)=2x$  有两个不同的实根, 所以  $a^x+2k=a^{2x}$  有两个不同的实根. 令  $a^x=t(t>0)$ , 则方程  $t^2-t-2k=0$  有两个不同的正实数根, 即  $\begin{cases} \Delta=1+8k>0, \\ -2k>0, \\ 1>0, \end{cases}$  所以  $-\frac{1}{8}<k<0$ , 即  $k$

的取值范围为  $\left(-\frac{1}{8}, 0\right)$ .

**8. C** 【解析】 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-2 \cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-2\right]<0$ , 则  $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-2 \cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-2>1$ . 设  $\left(\frac{1}{3}\right)^x=t, t>0$ , 则

$t^2 - 2t - 3 > 0$ , 又  $t > 0$ , 解得  $t > 3$ , 故  $(\frac{1}{3})^x > 3$ , 解得  $x < -1$ , 所以  $x$  的取值范围是  $(-\infty, -1)$ . 故 C 正确.

**9. BD** 【解析】因为  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(x) = \log_4(1+4^x) - \log_4 4^{\frac{x}{2}} = \log_4 \frac{1+4^x}{2^x} = \log_4(2^{-x} + 2^x)$ , 所以  $f(-x) = \log_4(2^x + 2^{-x}) = f(x)$ , 所以  $f(x)$  为偶函数, 故 A 错误, B 正确; 令  $t = 2^x (t > 0)$ , 则  $y = \log_4(t + \frac{1}{t})$ , 令  $s = t + \frac{1}{t}$ , 则  $y = \log_4 s$ , 当  $x \in [0, +\infty)$  时,  $t \in [1, +\infty)$ , 所以  $s = t + \frac{1}{t}$  单调递增, 又因为  $y = \log_4 s$  为增函数, 所以  $y = \log_4(t + \frac{1}{t})$  单调递增, 又因为  $t = 2^x$  为增函数, 所以  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 又因为  $f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 所以  $f(x) \geq f(0) = \frac{1}{2}$ , 所以  $f(x)$  的值域为  $[\frac{1}{2}, +\infty)$ , 故 C 错误, D 正确.

**10. (3, +\infty)** 【解析】令  $t = x^2 - 4x + 3$ , 则  $y = \log_2 t$ , 令  $t > 0$ , 即  $x^2 - 4x + 3 > 0$ , 解得  $x < 1$  或  $x > 3$ , 故函数  $y = \log_2(x^2 - 4x + 3)$  的定义域为  $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ . 由  $t = x^2 - 4x + 3$  的单调递增区间为  $[2, +\infty)$ ,  $y = \log_2 t$  为增函数, 知函数  $y = \log_2(x^2 - 4x + 3)$  的单调递增区间为  $(3, +\infty)$ .

**易错警示** 忽略真数大于 0

对数型函数是考查定义域问题的重点函数, 在求解对数型函数问题时, 一定要保证真数大于 0, 忽略这一点, 就会导致求解错误.

**11.  $\{a | a \geq 2\}$**  【解析】 $\exists x_1 \in [2, +\infty)$ ,  $\forall x_2 \in [\frac{1}{3}, 3]$  有

$f(x_1) \leq g(x_2)$  等价于当  $x_1 \in [2, +\infty)$ ,  $x_2 \in [\frac{1}{3}, 3]$  时,  $f(x_1)_{\min} \leq g(x_2)_{\min}$ .  
 $\therefore$  当  $x \in [2, +\infty)$  时,  $x^2 - 1 \geq 3$ , 且  $y = \log_3 x$  在定义域内为增函数,  $\therefore \log_3(x^2 - 1) \geq \log_3 3 = 1$ ,  
 $\therefore$  函数  $f(x) = \log_3(x^2 - 1)$  在  $[2, +\infty)$  上的最小值  $f(x)_{\min} = f(2) = 1$ . 又  $\because g(x) = x^2 - 2x + a$  的图象开口向上且对称轴方程为  $x = 1 \in [\frac{1}{3}, 3]$ ,  $\therefore g(x)$  在  $[\frac{1}{3}, 3]$  上的最小值  $g(x)_{\min} = g(1) = a - 1$ ,  $\therefore 1 \leq a - 1$ , 解得  $a \geq 2$ , 即实数  $a$  的取值范围是  $\{a | a \geq 2\}$ .

**12. ②③** 【解析】取函数  $f(x) = x^2$ ,  $f(0) = 0$ , 0 既是  $f(x)$  的不动点, 又是  $f(x)$  的次不动点, 故 ① 错误.  
 $f(x) = e^x + 2(x - 1)$ , 令  $g(x) = e^x + x - 2$ , 易知  $g(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的增函数, 又  $g(0) = e^0 + 0 - 2 < 0$ ,  $g(1) = e^1 + 1 - 2 > 0$ , 由零点存在定理得  $g(x)$  在区间  $(0, 1)$  内存在唯一的零点, 故 ② 正确.

当  $\log_{\frac{1}{2}}(4^x - a \cdot 2^x + 1) = x$  时,  $4^x - a \cdot 2^x + 1 = \frac{1}{2^x}$ , 即  $a = 2^x + \frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^{2x}}$ .  
 令  $2^x = t$ ,  $t \in [1, 2]$ ,  $a = t + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}$  在区间  $[1, 2]$  上单调递增, 则  $a = 2^x + \frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^{2x}}$  在  $[0, 1]$  上单调递增, 满足  $\log_{\frac{1}{2}}(4^x - a \cdot 2^x + 1) = x$  有唯一解, 则  $1 \leq a \leq \frac{9}{4}$ . 当  $\log_{\frac{1}{2}}(4^x - a \cdot 2^x + 1) = -x$  时,  $4^x - a \cdot 2^x + 1 = 2^x$ , 即  $a = 2^x + \frac{1}{2^x} - 1$ . 令  $2^x = t$ ,  $t \in [1, 2]$ , 所以  $a = t + \frac{1}{t} - 1$  在区

间  $[1, 2]$  上单调递增, 则  $a = 2^x + \frac{1}{2^x} - 1$  在  $[0, 1]$  上单调递增, 满足  $\log_{\frac{1}{2}}(4^x - a \cdot 2^x + 1) = -x$  有唯一解, 则  $1 \leq a \leq \frac{3}{2}$ . 综上,  $1 \leq a \leq \frac{3}{2}$ . 故 ③ 正确.

**13. 【解】** (1) 根据题意可得  $f(3) = \log_a(3 - 1) + 2 = 3$ ,  $\therefore \log_a 2 = 1$ ,  $\therefore a = 2$ .

(2) 根据 (1) 可知  $f(x) = \log_2(x - 1) + 2$ ,  $\therefore f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 又  $\because f(2^x - 3) < f(21 - 2^{x+1})$ ,  $\therefore 1 < 2^x - 3 < 21 - 2^{x+1}$ , 解得  $2 < x < 3$ ,  $\therefore$  不等式的解集为  $\{x | 2 < x < 3\}$ .

**14. 【解】** (1)  $f(x) = (2 \log_4 x - 2) \cdot (\log_4 x - \frac{1}{2})$ , 令  $t = \log_4 x$ ,  $x \in [2, 4]$ , 则  $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ , 此时  $y = (2t - 2) \cdot (t - \frac{1}{2}) = 2t^2 - 3t + 1 = 2(t - \frac{3}{4})^2 - \frac{1}{8}$ .  $\because t \in [\frac{1}{2}, 1]$ ,  $\therefore y \in [-\frac{1}{8}, 0]$ , 故函数  $f(x)$  的值域为  $[-\frac{1}{8}, 0]$ .

(2) 令  $t = \log_4 x$ , 则  $f(x) \geq m \log_2 x$  对于  $x \in [4, 16]$  恒成立, 即  $2t^2 - 3t + 1 \geq 2mt$  对于  $t \in [1, 2]$  恒成立, 所以  $2m \leq 2t + \frac{1}{t} - 3$  对于  $t \in [1, 2]$  恒成立. 易知  $g(t) = 2t + \frac{1}{t} - 3$  在  $t \in [1, 2]$  上单调递增,  $\therefore g(t)_{\min} = g(1) = 0$ ,  $\therefore 2m \leq 0$ , 解得  $m \leq 0$ , 即  $m$  的取值范围是  $(-\infty, 0]$ .

**15. 【解】** (1)  $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$ , 定义域为  $(-1, 1)$ ,  $f(-x) + f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x} + \lg \frac{1-x}{1+x} = 0$ .

$\lg \frac{1-x}{1+x} = \lg 1 = 0$ , 故  $f(x)$  是奇函数. 因为  $f(x) = \lg\left(-1 + \frac{2}{x+1}\right)$  在  $(-1, 1)$  上单调递减, 所以  $f(f(x)) + f(\lg 3) > 0$  等价于  $f(f(x)) > f(-\lg 3)$ , 所以  $f(x) < \lg \frac{1}{3}$ . 又因为  $-1 < f(x) < 1$ , 故  $\frac{1}{10} < \frac{1-x}{1+x} < \frac{1}{3}$ , 解得  $\frac{1}{2} < x < \frac{9}{11}$ , 故  $f(f(x)) + f(\lg 3) > 0$  的解集为  $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{11}\right)$ .

(2) 函数  $g(x) = 2 - a^x$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ), 存在  $x_1, x_2 \in [0, 1]$ , 使得  $f(x_1) = g(x_2)$  成立.

当  $0 \leq x < 1$  时,  $f(x) = \lg \frac{1-x}{x+1}$  的值域为  $(-\infty, 0]$ .

当  $a > 1$  时,  $g(x)$  在  $[0, 1]$  上单调递减, 可得  $g(x)$  的值域为  $(2-a, 1]$ ,

由题意可得  $f(x)$  和  $g(x)$  的值域存在交集, 即有  $2-a < 0$ , 即  $a > 2$ ;

当  $0 < a < 1$  时,  $g(x)$  在  $[0, 1]$  上单调递增, 可得  $g(x)$  的值域为  $[1, 2-a)$ ,  $f(x)$  和  $g(x)$  的值域不存在交集, 不符合题意. 综上, 实数  $a$  的取值范围是  $(2, +\infty)$ .

**16. B** 【解析】因为  $c = \log_3 2 < \log_3 3 = 1$ , 又因为  $b = \log_4 5 = \log_2 2.5 = \frac{1}{2} \log_2 5 = \log_2 \sqrt{5} < \log_2 \sqrt{6} = a$ , 所以  $a > b > \log_4 4 = 1$ , 所以  $c < 1 < b < a$ , 即  $c < b < a$ . 故 B 正确.

**17. A** 【解析】 $b = \log_3 4 = \log_3 \sqrt[4]{256} > c = \frac{5}{4} = \log_3 \sqrt[4]{243}$ ,  
又  $\frac{\log_3 4}{\log_2 3} = \log_3 2 \times \log_3 4 < \left(\frac{\log_3 2 + \log_3 4}{2}\right)^2 = \left(\frac{\log_3 8}{\log_3 9}\right)^2 < 1$ ,  
即  $\log_3 4 < \log_2 3$ ,  $b < a$ , 所以  $c < b < a$ . 故 A 正确.

**18. B** 【解析】 $a = \log_3 2 < \log_3 3^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$ ,  
 $b = \log_5 3 > \log_5 5^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$ ,  $b = \log_5 3 < \log_5 5^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$ ,  $c = \log_8 5 > \log_8 8^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$ .  
综上,  $a < b < c$ . 故 B 正确.

**19. A** 【解析】由题意知,  $0 < a < 1$ ,  $0 < b < 1$ ,  $c > 1$ , 所以  $c > a$ ,  $c > b$ .  $a = \log_6 3 = \log_6 \frac{6}{2} = 1 - \log_6 2$ ,  $b = \lg 5 = \lg \frac{10}{2} = 1 - \lg 2$ , 因为  $\log_6 2 = \frac{1}{\log_2 6}$ ,  $\lg 2 = \frac{1}{\log_2 10}$ , 且  $1 < \log_2 6 < \log_2 10$ , 所以  $\log_6 2 > \lg 2$ , 所以  $a < b$ . 综上,  $a < b < c$ . 故 A 正确.

**20. A** 【解析】当  $a = 1$  时,  $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$ , 由  $\frac{1+x}{1-x} > 0$  得  $-1 < x < 1$ , 则  $f(x)$  的定义域关于原点对称, 又  $f(-x) = \lg \frac{1-x}{1+x} = -\lg \frac{1+x}{1-x} = -f(x)$ , 则  $f(x)$  是奇函数, 故充分性成立;

若  $f(x) = \lg \frac{a+x}{1-ax}$  是奇函数, 则

$$f(-x) + f(x) = 0, \text{ 即 } \lg \frac{a-x}{1+ax} +$$

$$\lg \frac{a+x}{1-ax} = 0, \text{ 所以 } \lg \frac{a^2 - x^2}{1 - a^2 x^2} = 0, \text{ 则}$$

$$\frac{a^2 - x^2}{1 - a^2 x^2} = 1, \text{ 故 } a^2 - x^2 = 1 - a^2 x^2, \text{ 所}$$

以  $a^2 = 1$ , 故  $a = \pm 1$ , 不一定推得  $a = 1$ , 从而必要性不成立. 所以

“ $a = 1$ ”是“ $f(x) = \lg \frac{a+x}{1-ax}$  是奇函数”的充分不必要条件. 故 A 正确.

**21. C** 【解析】令  $t(x) = x^2 - ax + 3a$ , 由题意知,  $t(x)$  在区间  $[2, +\infty)$  上单调递增且  $t(x) > 0$ ,

$$\text{则有 } \begin{cases} \frac{a}{2} \leq 2, \\ t(2) = 4 - 2a + 3a > 0, \end{cases} \text{ 解得}$$

$-4 < a \leq 4$ , 则实数  $a$  的取值范围是  $(-4, 4]$ . 故 C 正确.

**22. AC** 【解析】因为  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 所以  $mx^2 + 2x + m - 1 > 0$  恒成立.

当  $m = 0$  时,  $2x - 1 > 0$ , 显然不恒成立, 故  $m \neq 0$ .

所以  $\begin{cases} m > 0, \\ \Delta = 4 - 4m(m-1) < 0, \end{cases}$  解得  $m >$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , 即实数  $m$  的取值范围是

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ , 故 A 正确.

因为  $f(x)$  的值域为  $\mathbf{R}$ , 所以函数  $y = mx^2 + 2x + m - 1$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 的值域有子集  $(0, +\infty)$ .

当  $m = 0$  时,  $f(x) = \log_2(2x-1)$ ,

定义域为  $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ , 值域为  $\mathbf{R}$ , 符合题意;

当  $m \neq 0$  时, 有  $\begin{cases} m > 0, \\ \Delta = 4 - 4m(m-1) \geq 0, \end{cases}$

解得  $0 < m \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

综上, 实数  $m$  的取值范围是

$\left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ , 故 B 错误.

函数  $f(x)$  在区间  $[2, +\infty)$  上单调递增.

当  $m = 0$  时,  $f(x) = \log_2(2x-1)$ , 函数在定义域  $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$  上单调递增, 符合题意;

当  $m \neq 0$  时, 有  $\begin{cases} m > 0, \\ -\frac{1}{m} \leq 2, \\ 4m + 4 + m - 1 > 0, \end{cases}$  解

得  $m > 0$ . 综上,  $m \geq 0$ , 故 C 正确.

当  $m = 0$  时,  $f(x) = \log_2(2x-1)$ , 由  $f(x) < 1$ , 即  $\log_2(2x-1) < 1$ , 可得  $0 < 2x-1 < 2$ , 解得  $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ , 即不等

式  $f(x) < 1$  的解集为  $\left\{x \mid \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right\}$ , 故 D 错误.

**23. [0, 1]** 【解析】函数  $y = \log_2(ax^2 + 2x + a)$  的值域为  $\mathbf{R}$ , 则  $t = ax^2 + 2x + a$  的值域需包含  $(0, +\infty)$ .

当  $a = 0$  时,  $t = 2x$  满足题意;

当  $a \neq 0$  时,  $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = 4 - 4a^2 \geq 0, \end{cases}$  解得

$0 < a \leq 1$ .

综上所述, 实数  $a$  的取值范围是  $[0, 1]$ .

**24. 【解】**(1) 由题意,  $kx^2 - 2x + 6 > 0$  在  $\mathbf{R}$  上恒成立.

当  $k = 0$  时,  $-2x + 6 > 0$  不恒成立;

当  $k \neq 0$  时, 易得  $k > 0$ , 且  $(-2)^2 - 4 \times 6k < 0$ , 解得  $k > \frac{1}{6}$ , 即实数  $k$  的

取值范围是  $(\frac{1}{6}, +\infty)$ .

(2) 要使函数  $f(x)$  在区间  $[2, 3]$  上单调递增, 首先  $f(x)$  需在区间  $[2, 3]$  上恒有意义, 即  $kx^2 - 2x + 6 > 0$  在  $[2, 3]$  上恒成立, 即  $k > -\frac{6}{x^2} + \frac{2}{x}$  在  $[2, 3]$  上恒成立. 令

$\frac{1}{x} = u, u \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ , 则  $k > -6u^2 + 2u$  在  $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$  上恒成立. 令  $y = -6u^2 + 2u = -6(u - \frac{1}{6})^2 + \frac{1}{6}$ , 所以

函数  $y = -6u^2 + 2u$  在  $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$  上单调递减, 故  $y_{\max} = -6 \times (\frac{1}{3})^2 + 2 \times$

$\frac{1}{3} = 0$ , 则  $k > 0$ .

①当  $a > 1$  时, 要使函数  $f(x)$  在区间  $[2, 3]$  上单调递增, 令  $g(x) = kx^2 - 2x + b, x \in [2, 3]$ , 则函数  $g(x) = kx^2 - 2x + 6$  在  $[2, 3]$  上恒正且单调递增, 故  $k > 0$  且  $\frac{1}{k} \leq 2$ , 即  $k \geq \frac{1}{2}$ , 此时  $f(x)$  的最

大值为  $\log_a(9k) = 2$ , 即  $k = \frac{a^2}{9}$

$(a \geq \frac{3\sqrt{2}}{2})$ , 满足题意;

②当  $0 < a < 1$  时, 要使函数  $f(x)$  在区间  $[2, 3]$  上单调递增, 则函数  $g(x) = kx^2 - 2x + 6$  在  $[2, 3]$  上恒正且单调递减, 故  $k > 0$  且  $\frac{1}{k} \geq 3$ , 即

$0 < k \leq \frac{1}{3}$ ,

此时  $f(x)$  的最大值为  $\log_a(9k) = 2$ , 即  $k = \frac{a^2}{9}$  ( $0 < a < 1$ ), 满足题意.

综上, 存在  $k = \frac{a^2}{9}$  ( $a \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$  或  $0 < a < 1$ ) 满足题意.

**25. 【解】**(1) 函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 由函数为偶函数, 得  $f(x) = f(-x)$ , 即  $\log_3(m^x + 1) - x = \log_3(m^{-x} + 1) + x$ , 则有  $\log_3(m^x + 1) - \log_3(\frac{1}{m^x} + 1) = 2x$ , 即  $\log_3 m^x = x \log_3 m = 2x$ , 得  $\log_3 m = 2$ , 所以  $m = 9$ .

(2) 由 (1) 可知,  $f(x) = \log_3(9^x + 1) - x$ , 则  $3^{f(x)} = 3^{\log_3(9^x + 1) - x} = \frac{3^{\log_3(9^x + 1)}}{3^x} = \frac{9^x + 1}{3^x} = 3^x + 3^{-x} = [(\sqrt{3})^x + (\sqrt{3})^{-x}]^2 - 2$ . 设  $g(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^{f(x)} - 3[(\sqrt{3})^x + (\sqrt{3})^{-x}] + a = \frac{1}{2} \cdot [(\sqrt{3})^x + (\sqrt{3})^{-x}]^2 - 1 - 3 \cdot [(\sqrt{3})^x + (\sqrt{3})^{-x}] + a$ , 依题意有  $g(x)_{\min} \leq 0$ . 由基本不等式得  $(\sqrt{3})^x + (\sqrt{3})^{-x} \geq 2 \cdot \sqrt{(\sqrt{3})^x \cdot (\sqrt{3})^{-x}} = 2$ , 当且仅当  $(\sqrt{3})^x = (\sqrt{3})^{-x}$ , 即  $x = 0$  时等号成立, 令  $(\sqrt{3})^x + (\sqrt{3})^{-x} = t$ ,  $h(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + a - 1$  ( $t \geq 2$ ), 则有

$h(t)_{\min} \leq 0$ . 由二次函数的性质可知  $h(t)$  在  $[2, 3]$  上单调递减, 在  $[3, +\infty)$  上单调递增,  $h(t)_{\min} =$

$h(3) = \frac{9}{2} - 9 + a - 1 = a - \frac{11}{2}$ , 则有

$a - \frac{11}{2} \leq 0$ , 即  $a \leq \frac{11}{2}$ , 所以实数  $a$  的最大整数值为 5.

### S3 & S4 考点训练

**1. B** 【解析】由题意可知  $\begin{cases} 1-x > 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$  解

得  $x < 1$  且  $x \neq 0$ . 故 B 正确.

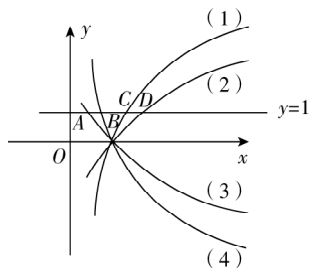
**2. B** 【解析】 $\because$  函数  $f(x) = (a^2 + a - 5) \log_a x$  为对数函数,

$\begin{cases} a^2 + a - 5 = 1, \\ a > 0, \\ a \neq 1, \end{cases}$  解得  $a = 2, \therefore f(x) =$

$\log_2 x, \therefore f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 \frac{1}{8} = -3$ . 故 B

正确.

**3. B** 【解析】作直线  $y = 1$ , 交四条曲线于 A, B, C, D 四点,



由 A, B 的位置可得 (3) 对应函数  $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ , (4) 对应函数  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ , 而 (1) 曲线和 (4) 曲线关于  $x$  轴对称, 所以 (1) 对应函数  $y = \log_5 x$ , 所以不属于函数  $y = \log_{\frac{1}{5}} x, y = \log_{\frac{1}{3}} x, y = \log_3 x$  的一个是 (2) 曲线. 故 B 正确.

**4. A** 【解析】令  $x + 2 = 1$ , 即  $x = -1$ ,  $f(-1) = -1$ , 该图象经过定点  $(-1, -1)$ . 故 A 正确.

**5. C** 【解析】依题意,  $x = \left(1 + \frac{5}{1000}\right)^y = 1.005^y$ , 化为对数函数得  $y = \log_{1.005} x$ , 所以  $x$  与  $y$  之间的函数关



式是  $y = \log_{1.005} x$ . 故 C 正确.

**6. C** 【解析】因为  $0 < a < 1$ , 所以  $\frac{1}{a} >$

1, 所以指数函数  $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$  是增函数, 故 A 错误;

$y = \log_a(-x)$  的定义域为  $(-\infty, 0)$ , 其图象与函数  $y = \log_a x$  的图象关于  $y$  轴对称, 函数  $y = \log_a x$  是减函数, 所以  $y = \log_a(-x)$  是增函数, 故 BD 错误, C 正确.

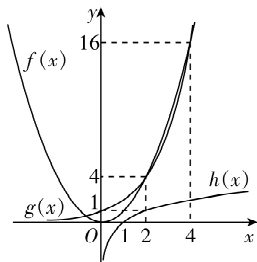
**7. B** 【解析】指数函数  $y = 0.5^x$  在  $\mathbf{R}$  上为减函数, 则  $a = 0.5^{0.5} < 0.5^0 = 1$ , 即  $0 < a < 1$ ;

对数函数  $y = \ln x$  在  $(0, +\infty)$  上为增函数, 则  $b = \ln 3 > \ln e = 1$ ;

对数函数  $y = \log_2 x$  在  $(0, +\infty)$  上为增函数, 则  $c = \log_2 0.2 < \log_2 1 = 0$ . 因此  $b > a > c$ , B 正确.

**8. A** 【解析】因为  $f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的减函数, 所以每一段都单调递减, 即  $\begin{cases} 2a-1 < 0, \\ 0 < a < 1. \end{cases}$  又因为分段处也需要满足单调递减, 所以  $(2a-1) \times 1 + 4a \geq \log_a 1$ , 结合以上不等式, 可解得  $\frac{1}{6} \leq a < \frac{1}{2}$ , 即  $a$  的取值范围是  $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ . 故 A 正确.

**9. ACD** 【解析】画出函数  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 2^x$ ,  $h(x) = \log_2 x$  的图象, 如图所示, 当  $x \in (4, +\infty)$  时, 函数  $g(x) = 2^x$  增长速度最快,  $h(x) = \log_2 x$  增长速度最慢. 故 B 正确, ACD 错误.



**10. ABC** 【解析】若  $(a, b)$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) 为函数  $y = \log_2 x$  图象上的

一点,  $\log_2 a = b$ ,  $2^b = a$ , 则  $(b, a)$  为函数  $y = 2^x$  图象上的点, 故 A 正确;

$\therefore \log_2 a = b, \therefore \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{a} = \frac{-1}{-1}$ .

$\log_2 a = b$ , 则  $\left(\frac{1}{a}, b\right)$  为函数  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  图象上的点, 故 B 正确;

$\therefore 2^b = a, \therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{-b} = 2^b = a$ , 则

$(-b, a)$  为函数  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  图象上的点, 故 C 正确;

$\therefore \log_2 a = b, \therefore \log_4 a = \frac{1}{2} \log_2 a = \frac{1}{2} b \neq 2b$ , 故 D 错误.

**11.  $(-\infty, -1]$**  【解析】 $\because x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \geq 2, \therefore \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 6x + 11) \leq \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$ .

**12.  $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$**  【解析】由函数  $y = \log_2(4^x - a \cdot 2^x + a)$ , 令  $f(x) = 4^x - a \cdot 2^x + a$ , 令  $t = 2^x > 0$ , 可得  $g(t) = t^2 - a \cdot t + a$ , 要使得函数  $y = \log_2(4^x - a \cdot 2^x + a)$  的值域为  $\mathbf{R}$ , 则  $g(t) = t^2 - a \cdot t + a$  ( $t > 0$ ) 的值域能取遍一切正实数.

当  $a > 0$  时, 则满足  $\Delta = (-a)^2 - 4a \geq 0$ , 解得  $a \geq 4$ ;

当  $a = 0$  时, 可得  $g(t) = t^2 \geq 0$ , 符合题意;

当  $a < 0$  时, 则满足  $g(0) = a < 0$ , 此时函数  $g(t)$  的值域能取遍一切正实数, 符合题意.

综上, 实数  $a$  的取值范围为  $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$ .

**13.  $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$**  【解析】设  $A(x_1, y_1)$ ,  $E(x_2, y_2)$ , ( $y_1, y_2 > 0$ ), 则  $C(2x_1 - 1, 0)$ , 因为  $\triangle ABC$  与  $\triangle ECD$  的相似比为 2, 所以有  $\frac{x_2 - (2x_1 - 1)}{x_1 - 1} = 2$ , 即

$4x_1 - x_2 = 3$ , 又因为  $y_2 = 2y_1$ , 所以  $\log_a x_2 = 2 \log_a x_1 = \log_a x_1^2$ , 所以  $x_2 = x_1^2$ , 即  $4x_1 - x_1^2 = 3$ , 整理可得  $x_1^2 - 4x_1 + 3 = 0$ , 解得  $x_1 = 1$  (舍去) 或  $x_1 = 3$ , 又因为  $\triangle ABC$  为等腰直角三角形, 所以有  $y_1 = x_1 - 1 = 2$ , 由  $y_1 = \log_a x_1$  可得  $2 = \log_a 3$ , 所以有  $a^2 = 3$ , 解得  $a = \pm\sqrt{3}$  (舍去负值), 故  $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$ .

**14. 3  $(-\infty, -2]$**  【解析】因为  $x \in [0, 2]$ ,

当  $a > 1$  时,  $f(x) = \log_a(x+1)$  单调

递增,  $\begin{cases} f(0) = \log_a 1 = 0, \\ f(2) = \log_a 3 = 1, \end{cases}$  解得

$a = 3$ ;

当  $0 < a < 1$  时,  $f(x) = \log_a(x+1)$  单

调递减,  $\begin{cases} f(0) = \log_a 1 = 1, \\ f(2) = \log_a 3 = 0 \end{cases}$  无解.

故  $a = 3$ .

因为函数  $g(x) = 3^{x+m} - \frac{1}{9}$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 函数图象不经过第二象限, 所以  $g(0) = 3^m - \frac{1}{9} \leq 0$ , 解得  $m \leq -2$ , 故  $m$  的取值范围是  $(-\infty, -2]$ .

**15. 【解】**(1)  $\because g(x) = \log_a 4 = 2$ , 解得  $a = 2, \therefore g(x) = \log_2 x, \therefore$  函数  $y = f(x)$  的图象与  $g(x) = \log_2 x$  的图象关于  $x$  轴对称,  $\therefore f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ .

(2)  $\because$  函数  $y = f(x)$  为减函数且

$$f(3x-1) > f(-x+5), \therefore \begin{cases} 3x-1 > 0, \\ -x+5 > 0, \\ 3x-1 < -x+5, \end{cases}$$

解得  $\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$ , 即  $x$  的取值范围

是  $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$ .

**16. 【解】**(1) 若  $f(x) - g(x)$  的解析式有意义, 则  $f(x) = \log_a(3+2x)$ ,  $g(x) = \log_a(3-2x)$  的

解析式都有意义, 即  $\begin{cases} 3+2x > 0, \\ 3-2x > 0, \end{cases}$



解得  $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$ , 所以函数  $f(x) - g(x)$  的定义域是  $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ .

(2) 函数  $f(x) - g(x)$  是奇函数, 理由如下:

由(1)知函数  $f(x) - g(x)$  的定义域关于原点对称,  $\therefore f(-x) - g(-x) = \log_a(3-2x) - \log_a(3+2x) = -[\log_a(3+2x) - \log_a(3-2x)] = -[f(x) - g(x)]$ ,  $\therefore$  函数  $f(x) - g(x)$  是奇函数.

(3) 若  $f(x) - g(x) > 0$ , 则  $\log_a(3+2x) > \log_a(3-2x)$ .

当  $a > 1$  时, 有  $3+2x > 3-2x$ , 解得  $x > 0$ , 由(1)可得此时  $x$  的取值范围是  $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ ;

当  $0 < a < 1$  时, 有  $3+2x < 3-2x$ , 解得  $x < 0$ , 由(1)可得此时  $x$  的取值范围是  $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ .

综上, 当  $a > 1$  时,  $x$  的取值范围是  $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ ; 当  $0 < a < 1$  时,  $x$  的取值范围是  $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ .

17. 【解】(1)  $\because$  函数  $f(x) = \lg\left(\frac{1-mx}{1-x}\right)$  为奇函数,  $\therefore f(-x) = -f(x)$  在定义域内恒成立, 即  $\lg\left(\frac{1+mx}{1+x}\right) = -\lg\left(\frac{1-mx}{1-x}\right)$ ,  $\lg\left(\frac{1+mx}{1+x}\right) + \lg\left(\frac{1-mx}{1-x}\right) = 0$ , 则  $\frac{1+mx}{1+x} \cdot \frac{1-mx}{1-x} = 1$ , 即  $1-m^2x^2 = 1-x^2$  在定义域内恒成立,  $\therefore m = -1$  或  $m = 1$ . 当  $m = 1$  时,  $f(x) = \lg\left(\frac{1-mx}{1-x}\right) = \lg\frac{1-x}{1-x}$ ,  $1-x \neq 0$ , 即  $x \neq 1$ , 即函数的定义域关于原点对称, 不满足条件, 舍去; 当  $m = -1$  时,  $f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$ , 由

$\frac{1+x}{1-x} > 0$ , 解得  $-1 < x < 1$ , 故  $m = -1$ ,

且函数  $f(x)$  的定义域是  $(-1, 1)$ .

(2) 函数  $f(x)$  是增函数, 理由如下:

$\because f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$ ,  $-1 < x < 1$ , 任取

$-1 < x_1 < x_2 < 1$ , 设  $u(x) = \frac{1+x}{1-x}$ ,  $-1 <$

$x < 1$ , 则  $u(x_1) - u(x_2) = \frac{1+x_1}{1-x_1} -$

$\frac{1+x_2}{1-x_2} = \frac{2(x_1-x_2)}{(1-x_1)(1-x_2)}$ .  $\because -1 <$

$x_1 < x_2 < 1$ ,  $\therefore u(x_1) - u(x_2) < 0$ ,

$\therefore u(x_1) < u(x_2)$ , 即  $\lg[u(x_1)] <$

$\lg[u(x_2)]$ ,  $\therefore f(x_1) < f(x_2)$ , 即

$f(x)$  在定义域内单调递增.

18. 【解】(1)  $\because f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $\therefore ax^2 + (a+1)x + a+1 > 0$  对  $\forall x \in \mathbf{R}$  恒成立.

当  $a = 0$  时,  $x+1 > 0$  对  $\forall x \in \mathbf{R}$  不恒成立, 舍去;

当  $a \neq 0$  时,  $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = (a+1)^2 - 4a(a+1) < 0, \end{cases}$  解得  $a > \frac{1}{3}$ .

综上所述, 实数  $a$  的取值范围为  $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ .

(2) 设  $g(x) = ax^2 + (a+1)x + a+1$ ,  $\therefore f(x)$  的定义域为  $[a+1, 2(a+1)]$ ,  $\therefore g(x) > 0$  在  $[a+1, 2(a+1)]$  上恒成立,

当  $a = 0$  时,  $g(x) = x+1 > 0$  在  $[1, 2]$  上恒成立, 满足题意;

当  $a > 0$  时,  $g(x)$  的图象开口向上, 对称轴为直线  $x = -\frac{a+1}{2a} < 0$ ,

$g(x)$  在  $[a+1, 2(a+1)]$  上单调递

增,  $\therefore g(a+1) = a(a+1)^2 + (a+1)$

$(a+1) + a+1 = (a+1)(a^2 + 2a +$

$2) > 0$  恒成立,  $\therefore a > 0$  满足题意;

当  $a < 0$  时,  $g(x)$  的图象开口向下,  $g(x) > 0$  在  $[a+1, 2(a+1)]$  上

恒成立, 则  $\begin{cases} g(a+1) > 0, \\ g[2(a+1)] > 0, \end{cases}$   $g(a+1) = (a+1)(a^2 + 2a + 2) > 0$ ,  $\therefore a^2 + 2a + 2 > 0$  恒成立,  $\therefore -1 < a < 0$ ;  $g[2(a+1)] = (a+1)(4a^2 + 6a + 3) > 0$ ,  $\therefore 4a^2 + 6a + 3 > 0$  恒成立,  $\therefore -1 < a < 0$ .

综上所述,  $a$  的取值范围为  $(-1, +\infty)$ .

## 985 冲刺专题七 幂指对函数综合问题

1. D 【解析】 $y = x^3$  是奇函数, 故 A 错误;

$y = \ln \frac{1}{x}$  的定义域为  $(0, +\infty)$ , 是非奇非偶函数, 故 B 错误;

$y = 2^x$  是非奇非偶函数, 故 C 错误;

$y = x^2$  是偶函数, 且在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增, 故 D 正确.

2. C 【解析】函数  $f(x) = \begin{cases} 1 + \log_2(2-x), & x < 1, \\ 2^{x-1}, & x \geq 1, \end{cases}$  则  $f(-2) = 1 +$

$\log_2(2+2) = 1 + 2 = 3$ ,  $f(\log_2 12) = 2^{\log_2 12 - 1} = 2^{\log_2 12} \times \frac{1}{2} = 12 \times \frac{1}{2} = 6$ , 所以

$f(-2) + f(\log_2 12) = 3 + 6 = 9$ . 故 C 正确.

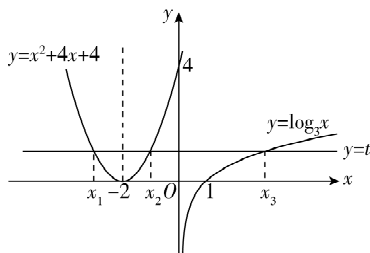
3. D 【解析】 $\because y = x^{0.8}$  在  $(0, +\infty)$  上是增函数, 且  $3.6 > 2.4 > 1$ ,  $\therefore 3.6^{0.8} > 2.4^{0.8} > 1$ .  $\therefore \log_{0.3} 4.2 < \log_{0.3} 1 = 0 = \log_{0.4} 1 < \log_{0.4} 0.5 < \log_{0.4} 0.4 = 1$ ,  $\therefore \log_{0.3} 4.2 < 0 < \log_{0.4} 0.5 < 1$ ,  $\therefore b > a > d > c$ . 故 D 正确.

4. B 【解析】因为函数  $f(x) = \frac{2^{x+1}x^3}{4^x+1} = \frac{2x^3}{2^x+2^{-x}}$ , 定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(-x) = \frac{-2x^3}{2^{-x}+2^x} = -\frac{2x^3}{2^x+2^{-x}} = -f(x)$ , 所以函数为奇函数, 故 C 错误; 由于  $x > 0$  时,  $f(x) > 0$ , 故 D 错误; 再根据 AB 选项, 考虑特殊值  $f(4) = \frac{2^5 \times 4^3}{4^4+1} = \frac{8 \times 4^4 + 8 - 8}{4^4+1} = 8 -$

$\frac{8}{4^4+1} \approx 8$ , 故 A 错误, B 正确.

5. (0, 4) 【解析】 $\because 2^0 = 1, \log_a 1 = 0$ ,  
 $\therefore x = 0$  时,  $y = 2^0 + \log_a(0+1) + 3 = 1 + 0 + 3 = 4$ , 故  $y = 2^x + \log_a(x+1) + 3$   
 的图象恒过定点 (0, 4).

6. (-3, 77] 【解析】设  $x_1 < x_2 < x_3$ ,  
 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = t$ , 由图象可知,  
 当  $0 < t \leq 4$  时, 直线  $y = t$  与函数  
 $y = f(x)$  图象的三个交点的横坐标  
 分别为  $x_1, x_2, x_3$ , 二次函数  $y = x^2 + 4x + 4$   
 的图象关于直线  $x = -2$  对称, 则  $x_1 + x_2 = -4$ , 由于  
 $0 < f(x_3) \leq 4$ , 即  $0 < \log_3 x_3 \leq 4$ , 得  $1 < x_3 \leq 81$ , 解得  
 $-3 < x_1 + x_2 + x_3 \leq 77$ . 因此  $x_1 + x_2 + x_3$   
 的取值范围是  $(-3, 77]$ .



7. 1 【解析】直线  $y = 1$  与函数  
 $f(x) = 2^x + x$  的图象交点的横坐标,  
 即为方程  $2^x + x = 1$  的解, 等价于方  
 程  $2^x = 1 - x$  的解, 等价于函数  $y = 2^x$   
 与  $y = 1 - x$  的图象交点的横

坐标;

同理, 直线  $y = 1$  与函数  $g(x) = \log_2 x + x$   
 的图象交点的横坐标, 即为方程  $\log_2 x + x = 1$   
 的解, 等价于方程  $\log_2 x = 1 - x$  的解, 等价于函数  
 $y = \log_2 x$  与  $y = 1 - x$  的图象交点的横坐标.

因为函数  $y = 2^x$  与  $y = \log_2 x$  互为反函数,  
 图象关于直线  $y = x$  对称, 所以函数  $y = 2^x$   
 与  $y = 1 - x$  图象的交点坐标为 (0, 1), 函数  
 $y = \log_2 x$  与  $y = 1 - x$  的图象交点坐标为 (1, 0),  
 即  $x_1 = 0, x_2 = 1$ , 所以  $x_1 + x_2 = 1$ .

8. 【解】(1) 因为函数  $f(x) = \ln(x+a)$   
 ( $a \in \mathbf{R}$ ) 的图象过点 (1, 0), 所以  
 $\ln(1+a) = 0$ , 解得  $a = 0$ , 所以函数  
 $f(x)$  的解析式为  $f(x) = \ln x$ .

(2) 由 (1) 可知  $\ln x + \ln(2x-k) = \ln(2x^2 - kx) = 0$ ,  
 $x \in (1, 2)$ , 所以方程  $2x^2 - kx - 1 = 0$  在 (1, 2) 上有实数根,  
 设  $h(x) = 2x^2 - kx - 1$ , 因为  $h(x)$   
 的图象过点 (0, -1), 由图象可得

$$\begin{cases} h(1) = 1 - k < 0, \\ h(2) = 7 - 2k > 0, \end{cases} \text{ 解得 } 1 < k < \frac{7}{2}, \text{ 因}$$

为  $k \in \mathbf{Z}$ , 所以  $k$  的值为 2 或 3.

(3) 因为  $m > 0$  且  $m > \frac{1}{m}$ , 所以  $m > 1$

且  $0 < \frac{1}{m} < 1$ , 因为  $g(x) = x^2 - 2e^{f(x)} = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ , 所以  $g(x)$  的最  
 大值可能是  $g(m)$  或  $g\left(\frac{1}{m}\right)$ , 因为

$$g(m) - g\left(\frac{1}{m}\right) = m^2 - 2m - \left(\frac{1}{m^2} - \frac{2}{m}\right) = m^2 - \frac{1}{m^2} - \left(2m - \frac{2}{m}\right) = \left(m - \frac{1}{m}\right)\left(m + \frac{1}{m} - 2\right) = \left(m - \frac{1}{m}\right) \cdot \frac{(m-1)^2}{m} > 0, \text{ 所以 } g(x)_{\max} =$$

$g(m) = m^2 - 2m$ . 若  $g(x) < -\ln(m-1)$ , 只需  
 $g(x)_{\max} < -\ln(m-1)$ , 即  $m^2 - 2m < -\ln(m-1)$ , 设  
 $h(m) = m^2 - 2m + \ln(m-1)$  ( $m > 1$ ),  $h(m)$  在  
 $(1, +\infty)$  上单调递增, 又因为  $h(2) = 0$ , 所以  
 $m^2 - 2m + \ln(m-1) < 0$ , 即  $h(m) < h(2)$ , 所以  
 $1 < m < 2$ , 所以  $m$  的取值范围是 (1, 2).

## 第四章 综合检测

1. C 【解析】 $\because y = \log_3 x$  在  $(0, +\infty)$   
 上单调递增,  $\therefore A = \{x \mid \log_3 x \leq 1\} = (0, 3]$ ,  
 则  $A \cap B = (0, 2]$ . 故 C 正确.

2. C 【解析】 $y = \ln e^x$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  
 $y = e^{\ln x}$  的定义域为  $(0, +\infty)$ , 定义域不同,  
 不是同一个函数, 故 A 错误;  
 $y = t^{\frac{1}{2}}$  的定义域为  $[0, +\infty)$ ,  $y = \sqrt[4]{x^2}$   
 的定义域为  $\mathbf{R}$ , 定义域不同, 不是同一个函数,  
 故 B 错误;

$y = x^0 = 1, y = \frac{1}{x^0} = 1$ , 这两个函数的

定义域都是  $\{x \mid x \neq 0\}$ , 且对应法则也相同,  
 故是同一个函数, 故 C 正确;

$y = \log_2 x$  与  $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$  的定义域和对应法则都不同,  
 不是同一个函数, 故 D 错误.

3. B 【解析】 $f(x) = \log_2(x+3) + \frac{1}{x+2}$ , 令  $\begin{cases} x+3 > 0, \\ x+2 \neq 0, \end{cases}$  解得  $x > -3$  且  $x \neq -2$ ,  
 故函数  $f(x)$  的定义域为  $(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$ . 故 B 正确.

4. B 【解析】因为  $5^a = 2$ , 所以  $a = \log_5 2$ ,  
 则  $\log_5 18 = \log_5 2 + \log_5 9 =$

$\log_5 2 + 2 \log_5 3$ , 所以  $\log_5 18 = a + 2b$ . 故 B 正确.

5. C 【解析】由题意, 可得  $\lg(100X_0) = 6 \lg(1+p) + \lg X_0$ ,  
 即  $\lg 10^2 + \lg X_0 = 6 \lg(1+p) + \lg X_0$ , 所以  
 $2 + \lg X_0 = 6 \lg(1+p) + \lg X_0$ , 可得  
 $1 + p = 10^{\frac{1}{3}} \approx 2.154$ , 解得  $p \approx 1.154 = 115.4\%$ . 故 C 正确.

6. C 【解析】因为函数  $f(x) = \log_a(x^2 - ax + 1)$  在  $[2, +\infty)$  上单调递增,  
 令  $t = x^2 - ax + 1, x \in [2, +\infty)$ , 由二次函数的性质可知,  
 $t = x^2 - ax + 1$  只可能在  $[2, +\infty)$  上单

调递增,所以  $a > 1$ , 且  $2^2 - 2a + 1 > 0$ ,  
解得  $1 < a < \frac{5}{2}$ . 故 C 正确.

**7. C** 【解析】因为  $f(x) = |\ln x|$ , 所以  
 $a = f\left(\frac{1}{4}\right) = \left|\ln \frac{1}{4}\right| = \ln 4 = f(4)$ ,  
 $b = f\left(\frac{1}{3}\right) = \left|\ln \frac{1}{3}\right| = \ln 3 = f(3)$ ,  
 $c = f(2)$ , 当  $x \geq 1$  时,  $f(x) = \ln x$ ,  
所以  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上单调递增,  
因为  $4 > 3 > 2$ , 所以  $f(4) > f(3) > f(2)$ , 所以  $a > b > c$ , 即  $c < b < a$ .  
故 C 正确.

**8. A** 【解析】 $\because f(x) = \ln(\sqrt{1+9x^2}-3x)-2$ ,  $\therefore f(x) + f(-x) = \ln(\sqrt{1+9x^2}-3x)-2 + \ln(\sqrt{1+9x^2}+3x)-2 = \ln(1+9x^2-9x^2)-4 = -4$ ,  $\therefore \lg \frac{1}{4} = -\lg 4$ ,  
 $\therefore f\left(\lg \frac{1}{4}\right) + f(\lg 4) = -4$ . 故 A 正确.

**9. CD** 【解析】 $\because \log_3 a > \log_3 b$ ,  $\therefore a > b > 0$ ,  $\therefore 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ , 故 A 错误;  
 $\therefore$  不一定  $a-b > 1$ ,  $\therefore \log_3(a-b) > 0$  不一定成立, 故 B 错误;  
 $3^{a-b} > 3^0 = 1$ , 故 C 正确;  
 $\left(\frac{1}{3}\right)^a < \left(\frac{1}{3}\right)^b < \left(\frac{1}{2}\right)^b$ , 故 D 正确.

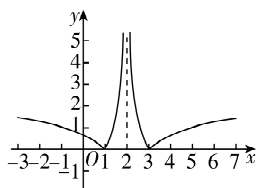
**10. BC** 【解析】 $\because 3^{-x} - 3^{-y} < \log_3 x - \log_3 y \Leftrightarrow 3^{-x} - \log_3 x < 3^{-y} - \log_3 y$ .  $\therefore$  设  
 $f(x) = 3^{-x} - \log_3 x = \frac{1}{3^x} - \log_3 x$ .  
 $\therefore f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上为减函数,  
 $\therefore x > y > 0$ , 故 A 错误;  
 $\because x > y, \therefore x-y > 0, \therefore e^{x-y} > 1$ , 故 B 正确;  
 $\because x > y, \therefore x-y > 0, \therefore x-y+1 > 1$ ,  
 $\ln(x-y+1) > 0$ , 故 C 正确;  
 $\because x > y > 0, \therefore \frac{y+1}{x+1} - \frac{y}{x} = \frac{x-y}{x(x+1)} > 0$ ,  
 $\therefore \frac{y+1}{x+1} > \frac{y}{x}$ , 故 D 错误.

**11. ABD** 【解析】将函数  $y = \ln x$  的  $x$  轴下方图象翻折到上方可得函数  $y = |\ln x|$  的图象, 将  $y$  轴右侧图象翻折到左侧, 右侧不变, 可得函数  $y = |\ln |x|| = |\ln |-x||$  的图象, 将函数图象向右平移 2 个单位, 可得函数  $y = |\ln |-(x-2)|| = |\ln |2-x||$  的图象, 则函数  $f(x) = |\ln |2-x||$  的图象如图所示. 由图可得函数  $f(x)$  在区间  $(1, 2)$  上单调递增, 故 A 正确;

函数  $y = f(x)$  的图象关于直线  $x = 2$  对称, 故 B 正确;

若  $x_1 \neq x_2$ , 但  $f(x_1) = f(x_2)$ , 当  $x_1, x_2$  关于直线  $x = 2$  对称时,  $x_1 + x_2 = 4$ , 故 C 错误;

函数  $f(x)$  的图象与  $x$  轴有且仅有两个交点, 故 D 正确.



**12. 6** 【解析】 $16^{\frac{3}{4}} - 4^{\log_4 \pi} + \sqrt{(3-\pi)^2} + \log_6 2 + \log_6 3 = (2^4)^{\frac{3}{4}} - \pi + \pi - 3 + \log_6 2 + \log_6 3 = 8 - 3 + 1 = 6$ .

**13.  $\frac{1}{3}$**  【解析】令  $x = 2$ , 则  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 即  
 $P\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ . 设  $f(x) = x^\alpha$ , 则  $2^\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , 所以  $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ ,  
 $f(9) = \frac{1}{3}$ .

**14.  $(-\infty, 1]$**  【解析】 $\because f(x) = \lg(2^x - b)$ , 当  $x \geq 1$  时,  $f(x) \geq 0$  恒成立,  $\therefore 2^x - b \geq 1$  对任意  $x \in [1, +\infty)$  恒成立, 即  $b \leq 2^x - 1$ , 而当  $x \in [1, +\infty)$  时,  $t = 2^x - 1$  是增函数, 得  $t = 2^x - 1$  的最小值为 1, 由此可得  $b \leq 1$ , 即  $b$  的取值范围是  $(-\infty, 1]$ .

**15. 【解】**(1) 奇函数. 证明过程如下:

由函数有意义得  $\begin{cases} 2+x > 0, \\ 2-x > 0, \end{cases}$  解得

$-2 < x < 2$ , 所以函数  $f(x)$  的定义域为  $(-2, 2)$ . 任取  $x \in (-2, 2)$ , 则  
 $f(-x) = \lg(2-x) - \lg(2+x) = -f(x)$ ,  $\therefore$  函数  $f(x)$  是奇函数.

(2)  $f(x) = \lg \frac{2+x}{2-x}$ , 令  $u(x) = \frac{2+x}{2-x} = \frac{4}{2-x} - 1$ , 则  $u(x)$  在  $(-2, 2)$  上单调

递增, 则  $f(x) = \lg \frac{2+x}{2-x}$  在  $(-2, 2)$  上单调递增.  $\therefore f(1-x) + f(3-2x) < 0$ ,

$\therefore f(1-x) < -f(3-2x) = f(2x-3)$ ,  
 $\therefore f(x)$  在  $(-2, 2)$  上单调递增,

$\therefore \begin{cases} 1-x < 2x-3, \\ -2 < 1-x < 2, \\ -2 < 2x-3 < 2, \end{cases}$  解得  $\frac{4}{3} < x < \frac{5}{2}$ .

$\therefore$  不等式的解集为  $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{2}\right)$ .

**16. 【解】**(1) 由  $f(-x) = -f(x)$ ,  
 $\log_{\frac{1}{2}-x-1} \frac{1+ax}{1-ax} = -\log_{\frac{1}{2}-x-1} \frac{1-ax}{1+ax}$ , 可得  
 $\frac{1+ax}{-x-1} = \frac{x-1}{1-ax} \Rightarrow (a^2-1)x^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$ ,  $a = 1$  舍去, 故  $a = -1$ .

(2)  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$ , 构造  
 $g(x) = f(x) - \left(\frac{1}{2}\right)^x = \log_{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{x-1}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ , 易得  $g(x)$  在区间  $[3, 4]$  上单调递增,  
 $\therefore g(x) \geq g(3) = -\frac{9}{8}$ , 从而  $m < -\frac{9}{8}$ ,  $\therefore m \in \left(-\infty, -\frac{9}{8}\right)$ .

**17. 【解】**(1) 由题意得  $\frac{1-x}{1+x} > 0$ , 可得  
 $-1 < x < 1$ , 故函数的定义域为  $(-1, 1)$ , 关于原点对称, 又因为

$f(-x) = \lg \frac{1+x}{1-x} = -\lg \frac{1-x}{1+x} = -f(x)$ ,  
 所以  $f(x)$  为奇函数, 因为  $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x} = \lg \left( -1 + \frac{2}{1+x} \right)$  在  $(-1, 1)$  上  
 单调递减, 函数的值域为  $\mathbf{R}$ , 故不  
 等式  $f(f(x)) + f(\lg 2) > 0$  可转化  
 为  $f(f(x)) > -f(\lg 2) = f(-\lg 2)$ ,  
 所以  $-1 < f(x) < -\lg 2$ , 所以  $-1 < \lg \frac{1-x}{1+x} < -\lg 2$ , 所以  $\frac{1}{10} < \frac{1-x}{1+x} < \frac{1}{2}$ , 解  
 得  $\frac{1}{3} < x < \frac{9}{11}$ , 故不等式的解集  
 为  $\left( \frac{1}{3}, \frac{9}{11} \right)$ .

(2) 因为存在  $x_1, x_2 \in [0, 1]$ , 使  
 得  $f(x_1) = g(x_2)$  成立, 所以  
 $x \in [0, 1]$  时,  $f(x)$  与  $g(x)$  的值域  
 有交集, 因为  $f(x) = \lg \frac{1-x}{x+1} = \lg \left( -1 + \frac{2}{x+1} \right)$  在  $[0, 1]$  上单调递  
 减, 所以  $f(x) \leq f(0) = 0$ , 故  $f(x)$   
 的值域为  $(-\infty, 0]$ .

当  $a > 1$  时,  $g(x) = 3 - a^x$  在  $[0, 1]$   
 上单调递减,  $g(x)$  的值域为  $(3 - a, 2]$ , 此时  $3 - a < 0$ , 即  $a > 3$ ;  
 当  $0 < a < 1$  时,  $g(x) = 3 - a^x$  在  $[0, 1]$   
 上单调递增,  $g(x)$  的值域为  $[2, 3 - a)$ , 不符合题意. 综上,  
 $a$  的取值范围为  $(3, +\infty)$ .

**18. 【解】**(1) 由题表中的数据可知,  
 年利润  $y$  (百万元) 是随着年投资  
 成本  $x$  (百万元) 的递增而递增,  
 而 ①  $y = -x + b$  是单调递减函数,  
 所以不符合题意; 将  $(3, 1), (5,$

$2)$  代入  $y = ab^x (a \neq 0, b > 0, \text{且 } b \neq 1)$ , 得  $\begin{cases} ab^3 = 1, \\ ab^5 = 2, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{4}, \\ b = \sqrt{2}, \end{cases}$  所以

$y = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\sqrt{2})^x = 2^{\frac{x-3}{2}}$ . 当  $x = 9$  时,

$y = 2^3 = 8$ , 所以不符合题意;

将  $(3, 1), (5, 2)$  代入  $y = \log_a(x + b) (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ , 得

$$\begin{cases} \log_a(3+b) = 1, \\ \log_a(5+b) = 2, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = 2, \\ b = -1, \end{cases}$$

所以  $y = \log_2(x - 1)$ , 当  $x = 9$  时,  
 $y = \log_2 8 = 3$ ; 当  $x = 17$  时,  $y = \log_2 16 = 4$ , 所以符合题意, 故可用  
 ③来描述  $x, y$  之间的关系.

(2) 令  $\log_2(x - 1) = 6$ , 则  $x = 65$ , 因为  
 年利润率为  $\frac{6}{65} \approx 9.2\% < 10\%$ , 所以  
 该企业要考虑转型.

**19. 【解】**(1) 当  $m = 2$  时,  $f(x) < \log_2 3$ ,  
 可化为  $\log_2(x - 2) + \log_2(x - 4) < \log_2 3$ ,  
 则  $\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x - 4 > 0, \\ \log_2[(x - 2)(x - 4)] < \log_2 3, \end{cases}$   
 即  $\begin{cases} x > 4, \\ (x - 2)(x - 4) < 3, \end{cases}$  解得  $4 < x < 5$ , 综上, 此不等式的解集是  
 $(4, 5)$ .

(2)  $x \in [3m, 4m]$  时,  $f(x) = \log_m[(x - m)(x - 2m)]$ , 若  $f(x) \leq 1$ , 则  $\log_m[(x - m)(x - 2m)] \leq \log_m m$ . ①当  $0 < m < 1$  时, 函数  $y = \log_m x$  在  $[3m, 4m]$  上单调递减, 则有  $(x - m)(x - 2m) \geq m$ , 即  $x^2 - 3mx + 2m^2 - m \geq 0$  在  $[3m, 4m]$  上恒成立, 令  $g(x) = x^2 - 3mx + 2m^2 - m = \left(x - \frac{3m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} - m$ ,  $g(x)$  在  $[3m, 4m]$  上单调递增,  $g(x)$  最小值为  $g(3m) = 2m^2 - m \geq 0$ , 得  $\frac{1}{2} \leq m < 1$ , 满足条件;

②当  $m > 1$  时, 函数  $y = \log_m x$  在  $[3m, 4m]$  上递增, 则有  $(x - m) \cdot (x - 2m) \leq m$ , 即  $x^2 - 3mx + 2m^2 - m \leq 0$  在  $[3m, 4m]$  恒成立,

令  $g(x) = x^2 - 3mx + 2m^2 - m = \left(x - \frac{3m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} - m$ ,  $g(x)$  在  $[3m, 4m]$  上单调递增,  $g(x)$  最大值为  $g(4m) = 6m^2 - m \leq 0$ , 解得  $0 \leq m \leq \frac{1}{6}$ , 与  $m > 1$  矛盾. 综上, 实数  $m$  的范围是  $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ .

(3) 由 (2) 知  $\frac{1}{2} \leq m < 1$ , 当  $x \in \left(\frac{5}{2}m, +\infty\right)$  时,  $f(x) = \log_m[(x - m) \cdot (x - 2m)] = \log_m \left[ \left(x - \frac{3}{2}m\right)^2 - \frac{m^2}{4} \right]$ , 令  $u = \left(x - \frac{3}{2}m\right)^2 - \frac{m^2}{4}$ , 则  $u$  在  $x \in \left(\frac{5}{2}m, +\infty\right)$  上单调递增,  $u \in \left(\frac{3}{4}m^2, +\infty\right)$ , 又因为  $y = \log_m u$  在定义域内单调递减, 则当  $x \in \left(\frac{5}{2}m, +\infty\right)$  时,  $f(x)$  单调递减, 由题意可知  $f(x)$  在  $[\alpha, \beta]$  上单调递减,

则有  $\begin{cases} f(\alpha) = \log_m \alpha, \\ f(\beta) = \log_m \beta, \end{cases}$  即  $f(x) = \log_m x$

在  $\left(\frac{5}{2}m, +\infty\right)$  上有两个不同的根, 即  $x^2 - (3m + 1)x + 2m^2 = 0$  在  $\left(\frac{5}{2}m, +\infty\right)$  上有两个不同的根, 令  $h(x) = x^2 - (3m + 1)x + 2m^2$ ,  $x \in \left(\frac{5}{2}m, +\infty\right)$ ,

$$\begin{cases} \Delta = (3m + 1)^2 - 8m^2 > 0, \\ \frac{3m + 1}{2} > \frac{5m}{2}, \\ h\left(\frac{5m}{2}\right) > 0, \end{cases}$$

解得  $m < 0$ , 与  $\frac{1}{2} \leq m < 1$  矛盾, 所以不存在这样的实数  $m$ .